Jordan の閉曲線定理の証明

～位相空間論だけを予備知識として～

yamyamtopo

Jordan の閉曲線定理は、日常的な言葉遣いで言えば、平面に「まる」を描くと、それがどんなにひどく歪んでいようとも、平面がその内側と外側の二つの領域に分けられる（そして、当の「まる」は二つの領域に共通の境界である）、というごく当たり前に見える内容の定理である。この定理は有名であり、そしてその証明がその見かけほど簡単ではないことも広く知られている。ともあれ、直観に即した結果が、厳密な数学な定理として再び獲得されることは誠に味わい深い。本稿では、Maehara [1] の方法によって、位相空間論以外の予備知識をとくに仮定せずに Jordan の閉曲線定理を証明したいと思う。

本稿では連結性および弧状連結性の定義には空でないことを含める。

1　直線から円周への被覆射影

この節では、実数直線 $\mathbb{R}$ から複素平面内の単位円周 $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ への

$$p(x) = e^{2\pi\sqrt{-1}x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

で定義される連続写像 $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ について考える。この連続写像 p はしばしば**被覆射影**と呼ばれる。

被覆射影 $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ は全射である。さらに、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、

$$p^{-1}(p(x)) = x + \mathbb{Z} = \{x + n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$$

となる。

位相空間の間の連続写像 $f\colon X \to Y$ が**商写像**であるとは、f が全射であって、かつ $A \subset Y$ に対して $f^{-1}(A)$ が X の開集合であるならば A が Y の開集合となることをいう。ここで、「開集合」の語をすべて「閉集合」に置き換えても同値な定義となることに注意する。簡単に分かるように、連続な全射 $f\colon X \to Y$ が開写像あるいは閉写像であるならば、f は商写像である。

補題 1.1. $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ は開写像である。

証明. p が商写像であることを示せば十分である。実際、p が商写像であることが言えたとして、$U \subset \mathbb{R}$ を開集合としよう。このとき、

$$p^{-1}(p(U)) = U + \mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (U+n)$$

となるが、$U + n = \{t+n \,|\, t \in U\}$ は $\mathbb{R}$ の開集合であるから、$p^{-1}(p(U))$ は $\mathbb{R}$ の開集合である。p は商写像であるから、$p(U)$ は S^1 の開集合であり、このことは $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ が開写像であることを示している。

p が商写像であることを示すため、$I = [0,1]$ を単位閉区間として、$i\colon I \to \mathbb{R}$ を包含写像とする。このとき $q = p \circ i\colon I \to S^1$ は連続な全射であるが、I はコンパクトで S^1 は Hausdorff 空間であるから、q は閉写像であり、よって q は商写像である。さて、$A \subset S^1$ とし、$p^{-1}(A)$ が $\mathbb{R}$ の開集合であると仮定する。このとき、$q^{-1}(A) = (p\circ i)^{-1}(A) = i^{-1}(p^{-1}(A))$ は I の開集合であるから、q が商写像であることにより、A は S^1 の開集合である。これで、p が商写像であることが示され、証明が終わった。 $\square$

S^1 の二つの開集合

$$U_0 = S^1 \setminus \{-1\}, \quad U_1 = S^1 \setminus \{1\}$$

を考える。$\{U_0, U_1\}$ は S^1 の開被覆である。さらに、$\mathbb{R}$ の開集合 $p^{-1}(U_0)$, $p^{-1}(U_1)$ は、開集合への直和分割

$$p^{-1}(U_0) = \coprod_{n\in\mathbb{Z}} U_{0,n}, \quad p^{-1}(U_1) = \coprod_{n\in\mathbb{Z}} U_{1,n}$$

をもつ。ここで、$U_{0,n}$ および $U_{1,n}$ は開区間

$$U_{0,n} = (n-1/2, n+1/2), \quad U_{1,n} = (n, n+1)$$

とする。各 $i \in \{0,1\}$, $n \in \mathbb{Z}$ に対して、p の制限 $p|_{U_{i,n}}$ の終域を U_i に制限したものを $p_{i,n}\colon U_{i,n} \to U_i$ と書くことにすると、$p_{i,n}$ は連続全単射である。補題 1.1 から、$p_{i,n}$ は開写像であることが分かるので、$p_{i,n}\colon U_{i,n} \to U_i$ は同相写像である。

X を位相空間、$f\colon X \to S^1$ を連続写像とする。このとき、連続写像 $\tilde{f}\colon X \to \mathbb{R}$ が f の**リフト**であるとは、$p \circ \tilde{f} = f$ が成り立つことをいう。

命題 1.2. $f\colon I \to S^1$ を連続写像とし、$x_0 \in \mathbb{R}$ が $p(x_0) = f(0)$ を満たすとする。このとき、f のリフト $\tilde{f}\colon I \to \mathbb{R}$ であって $\tilde{f}(0) = x_0$ を満たすものは、存在すれば一意的である。

この命題において、条件を満たすリフト $\tilde{f}$ が実際に存在することも言えるが（系 1.4)、それはすぐ後に示す命題 1.3 の特別な場合として得られる。

証明. $\tilde{f}, \tilde{f}' \colon I \to \mathbb{R}$ がともに条件を満たす f のリフトであるとする。I の部分集合

$$A = \{t \in I \mid \tilde{f}(t) = \tilde{f}'(t)\}$$

を考える。$\tilde{f}(0) = x_0 = \tilde{f}'(0)$ により $0 \in A$ であるから A は空ではなく、また $\tilde{f}, \tilde{f}'$ の終域である $\mathbb{R}$ は Hausdorff 空間であるから A は I の閉集合である。あとは、A が I の開集合であることを証明すれば I の連結性から $A = I$ となり、$\tilde{f} = \tilde{f}'$ であることが分かって証明が終わる。そこで、$t_0 \in A$ を任意に与える。ある $i \in \{0, 1\}$ に対して、$f(t_0) \in U_i$ である。すると、$\tilde{f}$ が f のリフトであることにより $\tilde{f}(t_0) \in p^{-1}(U_i) = \coprod_{n \in \mathbb{Z}} U_{i,n}$ であるから、ある $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\tilde{f}(t_0) \in U_{i,n}$ となる。$t_0 \in A$ により $\tilde{f}(t_0) = \tilde{f}'(t_0)$ であるから、このときもちろん $\tilde{f}'(t_0) \in U_{i,n}$ である。$\tilde{f}, \tilde{f}'$ の連続性により、t_0 の I における近傍 V が存在して、$\tilde{f}(V), \tilde{f}'(V) \subset U_{i,n}$ となる。$t \in V$ を任意に与える。このとき $\tilde{f}(t), \tilde{f}'(t) \in U_{i,n}$ なので、$p_{i,n}(\tilde{f}(t)), p_{i,n}(\tilde{f}(t))$ が定義され、

$$p_{i,n}(\tilde{f}(t)) = p(\tilde{f}(t)) = f(t) = p(\tilde{f}'(t)) = p_{i,n}(\tilde{f}(t))$$

である。ところが、$p_{i,n} \colon U_{i,n} \to U_i$ は単射であったから、$\tilde{f}(t) = \tilde{f}'(t)$ すなわち $t \in A$ である。よって、$V \subset A$ である。これで、A が I の開集合であることが示され、証明が終わった。 □

命題 1.3. X を位相空間、$f \colon X \times I \to S^1$ を連続写像とし、$\tilde{f}_0 \colon X \times \{0\} \to \mathbb{R}$ を $f|_{X \times \{0\}}$ のリフトとする。このとき、f のリフト $\tilde{f} \colon X \times I \to \mathbb{R}$ であって $\tilde{f}|_{X \times \{0\}} = \tilde{f}_0$ となるものが一意的に存在する。

証明. 最初に一意性を示そう。$\tilde{f}, \tilde{f}'$ がともに条件を満たす f のリフトであるとする。任意に $x \in X$ を与えると、$\tilde{f}|_{\{x\} \times I}$, $\tilde{f}'|_{\{x\} \times I}$ はともに $f|_{\{x\} \times I}$ のリフトであって $\tilde{f}(x, 0) = \tilde{f}_0(x, 0) = \tilde{f}'(x, 0)$ を満たす。したがって、$\{x\} \times I$ と I を同一視して命題 1.2 を用いれば、$\tilde{f}|_{\{x\} \times I} = \tilde{f}'|_{\{x\} \times I}$ が分かる。これが任意の $x \in X$ に対して成り立つので、$\tilde{f} = \tilde{f}'$ である。

次に、そのようなリフトの存在を示すため、$x \in X$ を任意に与える。以下では、x の開近傍 N_x を十分小さく取ると $f|_{N_x \times I}$ のリフト $\tilde{f}_x$ で $\tilde{f}_x|_{N_x \times \{0\}} = \tilde{f}_0|_{N_x \times \{0\}}$ を満たすものが存在することを証明しよう。$f_x \colon I \to S^1$ を $f_x(t) = f(x, t)$ で定義し、I の開被覆 $\mathcal{U} = \{f_x^{-1}(U_0), f_x^{-1}(U_1)\}$ を考えると、I はコンパクトな距離空間だから $\mathcal{U}$ は Lebesgue 数をもつ。すなわち、$\delta > 0$ が存在して、I の直径 δ 未満の部分集合は必ず

$f_x^{-1}(U_0)$ と $f_x^{-1}(U_1)$ の少なくとも一方には含まれる。正の整数 N を $1/N < \delta$ となるように取ると、$I_k = \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right]$ $(k = 1, \ldots, N)$ とおくとき、各 k に対して $i(k) \in \{0, 1\}$ を $I_k \subset f_x^{-1}(U_{i(k)})$ となるように選べる。このとき、$\{x\} \times I_k \subset f^{-1}(U_{i(k)})$ である。

以下では、x の開近傍 V_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ と $f|_{V_k \times I_k}$ のリフト $\tilde{f}_k \colon V_k \times I_k \to \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ で次を満たすものを k について帰納的に定義する。

(i) $V_{k-1} \supset V_k \quad (k = 2, 3, \ldots, N)$

(ii) $\tilde{f}_k|_{V_k \times \{\frac{k-1}{N}\}} = \tilde{f}_{k-1}|_{V_k \times \{\frac{k-1}{N}\}} \quad (k = 1, 2, \ldots, N)$

まず、$\{x\} \times I_1 \subset f^{-1}(U_{i(1)})$ であって $f^{-1}(U_{i(1)})$ は $X \times I$ の開集合であるから、I_1 のコンパクト性により、x の開近傍 V_1 を $V_1 \times I_1 \subset f^{-1}(U_{i(1)})$ となるように取れる。一方、$(x, 0) \in \{x\} \times I_1 \subset f^{-1}(U_{i(1)})$ により $f(x, 0) \in U_{i(1)}$ であり、したがって $\tilde{f}_0(x, 0) \in p^{-1}(f(x, 0)) \subset p^{-1}(U_{i(1)}) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} U_{i(1), n}$ であるから、ある $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\tilde{f}_0(x, 0) \in U_{i(1), n}$ となる。よって、$\tilde{f}_0$ の連続性によって、V_1 を小さく取り換えることで、$\tilde{f}_0(V_1 \times \{0\}) \subset U_{i(1), n}$ とできる。そこで、連続写像 $\tilde{f}_1 \colon V_1 \times I_1 \to \mathbb{R}$ を $\tilde{f}_1 = p_{i(1), n}^{-1} \circ f|_{V_1 \times I_1}$ で定義すれば、$\tilde{f}_1$ は $f|_{V_1 \times I_1}$ のリフトであって、(ii) の条件すなわち $\tilde{f}_1|_{V_1 \times \{0\}} = \tilde{f}_0|_{V_1 \times \{0\}}$ を満たす。

帰納的に、$V_1, \ldots, V_{k-1}$ および $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_{k-1}$ が条件 (i), (ii) を満たして取れたとする。$\{x\} \times I_k \subset f^{-1}(U_{i(k)})$ であるから、I_k のコンパクト性により、x の開近傍 V_k を $V_k \subset V_{k-1}$ かつ $V_k \times I_k \subset f^{-1}(U_{i(k)})$ となるように取れる。$\left(x, \frac{k-1}{N}\right) \in f^{-1}(U_{i(k)})$ により $\tilde{f}_{k-1}\left(x, \frac{k-1}{N}\right) \in p^{-1}(U_{i(k)}) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} U_{i(k), n}$ であるから、ある $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\tilde{f}_{k-1}\left(x, \frac{k-1}{N}\right) \in U_{i(k), n}$ となる。よって、$\tilde{f}_{k-1}$ の連続性により、V_k を小さく取り換えて $\tilde{f}_{k-1}\left(V_k \times \{\frac{k-1}{N}\}\right) \subset U_{i(k), n}$ とできる。そこで、連続写像 $\tilde{f}_k \colon V_k \times I_k \to \mathbb{R}$ を $\tilde{f}_k = p_{i(k), n}^{-1} \circ f|_{V_k \times I_k}$ で定義すれば、$\tilde{f}_k$ は $f|_{V_k \times I_k}$ のリフトであって、$\tilde{f}_k|_{V_k \times \{\frac{k-1}{N}\}} = \tilde{f}_{k-1}|_{V_k \times \{\frac{k-1}{N}\}}$ を満たす。これで帰納的構成が完結した。

$N_x = V_N$ とおき、$\tilde{f}_x \colon N_x \times I \to \mathbb{R}$ を $\tilde{f}_x|_{N_x \times I_k} = \tilde{f}_k|_{N_x \times I_k}$ $(k = 1, \ldots, N)$ により定義すれば、N_x は x の開近傍であって $\tilde{f}_x$ は $f|_{N_x \times I}$ のリフトである。さらに、$\tilde{f}_x|_{N_x \times \{0\}} = \tilde{f}_0|_{N_x \times \{0\}}$ も満たされる。各 $x \in X$ に対してこのような $N_x, \tilde{f}_x$ を選ぼう。すると、$\tilde{f}_x$ たちは定義域の共通部分において一致する。すなわち、各 $x, y \in X$ に対して $\tilde{f}_x|_{(N_x \cap N_y) \times I} = \tilde{f}_y|_{(N_x \cap N_y) \times I}$ である。実際、$z \in N_x \cap N_y$ を任意に与えれば、$\tilde{f}_x|_{\{z\} \times I}$ と $\tilde{f}_y|_{\{z\} \times I}$ はともに $f|_{\{z\} \times I}$ のリフトであって $\tilde{f}_x(z, 0) = \tilde{f}_0(z, 0) = \tilde{f}_y(z, 0)$ を満たすから、命題 1.2 により $\tilde{f}_x|_{\{z\} \times I} = \tilde{f}_y|_{\{z\} \times I}$ である。これが各 $z \in N_x \cap N_y$ について成り立つので、$\tilde{f}_x|_{(N_x \cap N_y) \times I} = \tilde{f}_y|_{(N_x \cap N_y) \times I}$ である。したがって、連続写像 $\tilde{f} \colon X \times I \to \mathbb{R}$

を、各 $x \in X$ に対して $\tilde{f}|_{N_x \times I} = \tilde{f}_x$ とすることで定義できる。この $\tilde{f}$ は定義から f のリフトであって、$\tilde{f}|_{X \times \{0\}} = \tilde{f}_0$ を満たす。 □

系 1.4. $f\colon I \to S^1$ を連続写像とし、$x_0 \in \mathbb{R}$ が $p(x_0) = f(0)$ を満たすとする。このとき、f のリフト $\tilde{f}\colon I \to \mathbb{R}$ であって $\tilde{f}(0) = x_0$ を満たすものが一意的に存在する。

証明. 一意性については命題 1.2 で証明した。存在については、命題 1.3 において X を一点からなる空間とした場合を考えれば分かる。 □

2　2 次元の Brouwer 不動点定理

前節に引き続いて、$p\colon \mathbb{R} \to S^1$ を被覆射影とする。位相空間 X と部分空間 $A \subset X$ に対して、連続写像 $r\colon X \to A$ が**レトラクション**であるとは、$r|_A = \mathrm{id}_A$ となることをいう。

定理 2.1. 閉円板 $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqq 1\}$ から円周 S^1 へのレトラクションは存在しない。

証明. レトラクション $r\colon D^2 \to S^1$ が存在すると仮定して矛盾を導こう。連続写像 $f\colon I \times I \to S^1$ を、

$$f(s,t) = r((1-t)e^{2\pi\sqrt{-1}s})$$

で定義する。このとき、r がレトラクションであることにより $f(s,0) = e^{2\pi\sqrt{-1}s} = p(s)$ であるから、$f|_{I \times \{0\}}$ のリフト $\tilde{f}_0\colon I \times \{0\} \to \mathbb{R}$ が $\tilde{f}_0(s,0) = s$ により定義される。したがって、命題 1.3 により、f のリフト $\tilde{f}\colon I \times I \to \mathbb{R}$ であって $\tilde{f}|_{I \times \{0\}} = \tilde{f}_0$ となるものが一意的に存在する。

$t \in I$ とする。f の定義により $f(0,t) = f(1,t)$ であるから、$\tilde{f}$ が f のリフトであることにより

$$\tilde{f}(1,t) - \tilde{f}(0,t) \in \mathbb{Z}$$

である。ところが、$\tilde{f}(1,t) - \tilde{f}(0,t)$ は $t (\in I)$ の関数として連続であるから、これは定値関数でなければならない。したがって、

$$\tilde{f}(1,1) - \tilde{f}(0,1) = \tilde{f}(1,0) - \tilde{f}(0,0) = \tilde{f}_0(1,0) - \tilde{f}_0(0,0) = 1 - 0 = 1 \qquad (\sharp)$$

となる。いま、$f|_{I \times \{1\}}$ は常に値 $r(0) \in S^1$ を取る定値関数であり、$\tilde{f}|_{I \times \{1\}}$ はそのリフトであるから、$r(0) = p(x_0)$ となる $x_0 \in \mathbb{R}$ を一つ選べば $\tilde{f}(I \times \{1\}) \subset x_0 + \mathbb{Z}$ である。ところが、$\tilde{f}(I \times \{1\})$ は連結であって $x_0 + \mathbb{Z}$ は離散位相をもつから、$\tilde{f}(I \times \{1\})$ は連結な離散空間となり、したがって一点のみからなる。よって、$\tilde{f}(0,1) = \tilde{f}(1,1)$ であるが、これは前に得られた $(\sharp)$ に矛盾する。 □

定理 2.2 (2 次元の Brouwer 不動点定理)**.** 任意の連続写像 $f\colon D^2 \to D^2$ は不動点をもつ。すなわち、$f(z) = z$ となるような $z \in D^2$ が存在する。

証明. $f\colon D^2 \to D^2$ を連続写像とする。f が不動点をもたない、すなわち、すべての $z \in D^2$ に対して $f(z) \neq z$ であるとして矛盾を導こう。このとき、各 $z \in D$ に対して、$f(z)$ を始点として z を通る半直線が定まるが、この半直線と S^1 との交点を $r(z)$ とする。これにより、写像 $r\colon D^2 \to S^1$ が定義される。計算により、$z - f(z) = w$ とおくとき、$r(z)$ は次の式で与えられることが分かる。

$$r(z) = z + tw \quad \text{ただし} \quad t = \frac{1}{|w|^2}\left(-\operatorname{Re}(\bar{z}w) + \sqrt{\operatorname{Re}(\bar{z}w)^2 + (1-|z|^2)|w|^2}\right) \qquad (\star)$$

この式から、r は連続写像である。また、$z \in S^1$ のときは定義から $r(z) = z$ となる[*1]。よって、$r\colon D^2 \to S^1$ はレトラクションであるが、これは定理 2.1 に反する。 □

3 不動点定理の帰結

この節以降では、単位閉円板 D^2 および単位円周 S^1 はそれぞれ実 2 次元平面 $\mathbb{R}^2$ 内のものを表すこととする。つまり、

$$D^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leqq 1\}, \quad S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

とする。まず、念のため次のことに証明を与えておこう。

補題 3.1. 閉円板 D^2 と正方形 $[-1,1]^2 = [-1,1] \times [-1,1]$ は同相である。

証明. $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して、$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $|x| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ と書くことにすれば、D^2, $[-1,1]^2$ はそれぞれ $\|x\| \leqq 1$, $|x| \leqq 1$ を満たす $x \in \mathbb{R}^2$ 全体の集合である。$f\colon D^2 \to [-1,1]^2$ および $g\colon [-1,1]^2 \to D^2$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\|x\|}{|x|}x & x \neq 0 \text{ のとき} \\ 0 & x = 0 \text{ のとき} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{\|x\|}x & x \neq 0 \text{ のとき} \\ 0 & x = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

[*1] 式 $(\star)$ を r の定義であると考えた場合、このことは次のように示される。$z \in S^1$ とし、$f(z) = u$ とおくと、$|z| = 1$, $|u| \leqq 1$, $w = z - u$ である。$\bar{z}u + z\bar{u} = |z+u|^2 - |z|^2 - |u|^2 \leqq (|z|+|u|)^2 - |z|^2 - |u|^2 = 2|z||u| \leqq 2$ により $\operatorname{Re}(\bar{z}u) \leqq 1$ であるから、$\operatorname{Re}(\bar{z}w) = \operatorname{Re}(\bar{z}(z-u)) = \operatorname{Re}(|z|^2 - \bar{z}u) = \operatorname{Re}(1 - \bar{z}u) = 1 - \operatorname{Re}(\bar{z}u) \geqq 0$ である。よって、式 $(\star)$ において $|z| = 1$ に注意すると $t = 0$ が得られ、$r(z) = z$ となることが分かる。

により定義する。ただし、0 は原点 $(0,0)$ を表す。これらが確かに $[-1,1]^2$, D^2 への写像となっており、互いに逆写像となっていることは容易に確かめられる。あとは、f と g がそれぞれ 0 において連続であることを確かめればよい。そのため、任意の $x \in \mathbb{R}^2$ に対して不等式

$$|x| \leqq \|x\| \leqq \sqrt{2}|x|$$

が成り立つことに注意する。この式から、任意の $x \in D^2$ に対して $\|f(x)\| \leqq \sqrt{2}\|x\|$ であり、これから f の 0 における連続性が分かる。同様に、任意の $x \in [-1,1]^2$ に対して $\|g(x)\| \leqq \|x\|$ であり、これから g の 0 における連続性が分かる。 □

補題 3.2. $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ が $a<b$, $c<d$ を満たすとし、長方形 $R=[a,b]\times[c,d]$ を考える。このとき、R の左右の辺を結ぶ道と、上下の辺を結ぶ道は必ず交わる。正確に述べれば、連続写像 $f,g\colon [-1,1]\to R$ が

$$f(-1)\in\{a\}\times[c,d],\quad f(1)\in\{b\}\times[c,d],\quad g(-1)=[a,b]\times\{c\},\quad g(1)=[a,b]\times\{d\}$$

を満たすならば、ある $s,t\in[-1,1]$ に対して $f(s)=g(t)$ となる。

証明. $f_1,g_1\colon[-1,1]\to[a,b]$, $f_2,g_2\colon[-1,1]\to[c,d]$ を $f(s)=(f_1(s),f_2(s))$, $g(t)=(g_1(t),g_2(t))$ により定義して、$F_0\colon[-1,1]^2\to\mathbb{R}^2$ を

$$F_0(s,t)=(g_1(t)-f_1(s),f_2(s)-g_2(t))$$

により定義する。もし、この補題の結論が成り立たなければ、$F_0(s,t)=0$ とはなり得ないから、$F_0\colon[-1,1]^2\to\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ とみなせる。さて、$\partial[-1,1]^2$ を正方形 $[-1,1]^2$ の境界とする。つまり、

$$\partial[-1,1]^2=\{(s,t)\in[-1,1]^2 \mid |s|=1 \text{ または } |t|=1\}$$

とおけば、連続写像 $\rho\colon\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to\partial[-1,1]^2$ を

$$\rho(x,y)=\frac{1}{\max\{|x|,|y|\}}(x,y)$$

で定義できる。そこで、連続写像 $F\colon[-1,1]^2\to\partial[-1,1]^2\subset[-1,1]^2$ を $F=\rho\circ F_0$ で定義する。補題 3.1 により、2 次元の Brouwer 不動点定理 2.2 は $[-1,1]^2$ についても成り立つから、F は不動点 $(s_0,t_0)\in[-1,1]^2$ をもつ。$F([-1,1]^2)\subset\partial[-1,1]^2$ なので、$(s_0,t_0)\in\partial[-1,1]^2$ であり、よって (i) $|s_0|=1$ あるいは (ii) $|t_0|=1$ が成り立つ。(i) の場合、$s_0=-1$ であるとすれば $F_0(s_0,t_0)=F_0(-1,t_0)$ の第一座標は

$g_1(t_0) - f_1(-1) = g_1(t_0) - a \geqq 0$ であるから $F(s_0, t_0)$ の第一座標も 0 以上であり、とくに $s_0 = -1$ とは等しくない。よって $F(s_0, t_0)$ と (s_0, t_0) は異なる点であるが、これは (s_0, t_0) が F の不動点であることに反する。また、$s_0 = 1$ であるとしても同様の矛盾が導かれる。(ii) の場合、$t_0 = -1$ であるとすれば $F_0(s_0, t_0) = F_0(s_0, -1)$ の第二座標は $f_2(s_0) - g_2(-1) = f_2(s_0) - c \geqq 0$ であるから $F(s_0, t_0)$ の第二座標も 0 以上であり、とくに $t_0 = -1$ とは等しくない。これは前の場合と同様に (s_0, t_0) が F の不動点であることに反する。$t_0 = 1$ であるとしても同様に矛盾する。以上により、(i) と (ii) のどちらの場合でも矛盾したので、補題は証明された。 □

4 Jordan の閉曲線定理

まず、いくつかの用語を準備する。$I = [0, 1]$ と同相な $\mathbb{R}^2$ の部分集合を**単純弧**といい、S^1 と同相な $\mathbb{R}^2$ の部分集合を**単純閉曲線**という。Jordan の閉曲線定理とは、次のような定理である。

定理 4.1 (Jordan の閉曲線定理)**.** 任意の単純閉曲線 $J \subset \mathbb{R}^2$ に対して、$\mathbb{R}^2 \setminus J$ はちょうど 2 個の連結成分をもち、それぞれの連結成分の境界は J に等しい。

以下ではこの定理を証明していく。

4.1 予備的考察

平面についての簡単な位相的事実を確かめることから始める。

補題 4.2. $\mathbb{R}^2$ の任意の開集合 U に対して、U の各連結成分は開集合である。

証明. C を U の連結成分とする。$x \in C$ を任意に与える。このとき、C は x を要素にもつ U の連結部分集合のうち最大のものであることに注意する。U が $\mathbb{R}^2$ の開集合であることから、x を中心とする（$\mathbb{R}^2$ における）開円板 D で $D \subset U$ となるものがある。D は x を要素にもつ連結集合であるから、さきに注意した最大性により、$D \subset C$ である。以上により、C が $\mathbb{R}^2$ の開集合であることが示された。 □

補題 4.3. $\mathbb{R}^2$ の連結開集合は弧状連結である。

証明. U を $\mathbb{R}^2$ の連結開集合とする。U の各弧状連結成分が U の開集合であることを示せばよい。実際、それが示されたとすれば、U の弧状連結成分への直和分解が U の開集

合への直和分解を与える。したがって、U の連結性から U の弧状連結成分はちょうど一個でなければならず、U の弧状連結性が示される。

残りの議論は、連結性が弧状連結性に変わるだけで、前の補題の証明とほとんど同じである。C を U の弧状連結成分とし、$x \in C$ とする。x を中心とする開円板 D で $D \subset U$ となるものがあるが、D は弧状連結だから $D \subset C$ である。これで、C が $\mathbb{R}^2$ の開集合であること、したがって U の開集合であることが示された。 □

補題 4.4. $\mathbb{R}^2$ の任意のコンパクト集合 K に対して、$\mathbb{R}^2 \setminus K$ の非有界な連結成分がただ一つ存在する。

証明. K は $\mathbb{R}^2$ のコンパクト集合なので有界である。よって、K は原点を中心とするある閉円板 D に含まれる。$\mathbb{R}^2 \setminus D$ は弧状連結、とくに連結であって $\mathbb{R}^2 \setminus K$ に含まれるから、$\mathbb{R}^2 \setminus K$ の連結成分 U で $\mathbb{R}^2 \setminus D \subset U$ となるものが存在する。$\mathbb{R}^2 \setminus D$ は非有界なので、U は非有界である。もし、$\mathbb{R}^2 \setminus K$ のもう一つの非有界な連結成分 U' があれば、$U' \not\subset D$ なので、$U' \cap (\mathbb{R}^2 \setminus D) \neq \emptyset$ であり、したがって $U' \cap U \neq \emptyset$ である。U, U' はどちらも $\mathbb{R}^2 \setminus K$ の連結成分なので、$U' = U$ である。これで、$\mathbb{R}^2 \setminus K$ の非有界な連結成分が U に限ることが示された。 □

とくに、上の補題の K が単純閉曲線 J である場合を考えると、$\mathbb{R}^2 \setminus J$ はちょうど一つの非有界な連結成分 U をもつことが分かる。Jordan の閉曲線定理は、その他に $\mathbb{R}^2 \setminus J$ は有界な連結成分 V をただ一つもち、J がこれらの連結成分の共通の境界となることを主張している。なお、U と V は補題 4.2 により $\mathbb{R}^2$ の開集合だから、最後の境界についての主張は $\overline{U} \setminus U = \overline{V} \setminus V = J$ と書くことができる。ここで、$\overline{U}, \overline{V}$ は U, V の閉包を表す。

4.2 単純弧が平面を分離しないこと

Jordan 閉曲線定理の証明のための重要なステップとして、次を証明する。

補題 4.5. 平面 $\mathbb{R}^2$ 内の任意の単純弧 A に対して、$\mathbb{R}^2 \setminus A$ は連結である。

証明. もし、$\mathbb{R}^2 \setminus A$ が連結でなかったとしよう。すると、補題 4.4 により、$\mathbb{R}^2 \setminus A$ には有界な連結成分が少なくとも一つ存在する。そこで、その一つを U としよう。必要なら、平行移動と適切な縮小を行うことで、原点 0 は U に属し、しかも $U \cup A$ は単位閉円板の内部 $D^2 \setminus S^1$ に含まれるとしてよい。

いま、$\mathbb{R}^2 \setminus A$ の U 以外の連結成分すべての和集合を V とおけば、補題 4.2 により、V は $\mathbb{R}^2$ の開集合であるが、$\mathbb{R}^2 \setminus V = U \cup A$ であるから、$U \cup A$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合であること

が分かる。よって、$U \cup A$ は D^2 の閉集合でもある。一方、$D^2 \setminus U$ も D^2 の閉集合であるから、D^2 は二つの閉集合の和集合として

$$D^2 = (U \cup A) \cup (D^2 \setminus U)$$

と表される。この二つの閉集合の共通部分は $(U \cup A) \cap (D^2 \setminus U) = A$ である。

さて、A は単純弧であるから単位閉区間 $[0,1]$ と同相である。そして、A はコンパクトなので $U \cup A$ の閉集合である。以上から、Tietze の拡張定理により、恒等写像 $\mathrm{id}\colon A \to A$ はある連続写像 $r_0\colon U \cup A \to A$ に拡張できる（すなわち、$U \cup A$ から A へのレトラクション r_0 が存在する）。さらに、前段落で述べたことにより、r_0 は次のようにして D^2 上の連続写像 $r_1\colon D^2 \to D^2$ に拡張できる。

$$r_1(x) = \begin{cases} r_0(x) & (x \in U \cup A \text{ のとき}) \\ x & (x \in D^2 \setminus U \text{ のとき}) \end{cases}$$

すると、$r_1(D^2) = D^2 \setminus U \subset D^2 \setminus \{0\}$ であるから、$r\colon D^2 \to S^1$ を

$$r(x) = \frac{1}{\|r_1(x)\|} r_1(x)$$

により定義できる。この r はレトラクションであるが、これは定理 2.1 に反する。 □

単純弧 $A \subset \mathbb{R}^2$ に対して、A の点 p であって $A \setminus \{p\}$ が連結であるようなものがちょうど 2 個存在する。これらの 2 個の点を A の**端点**という。$J \subset \mathbb{R}^2$ を単純閉曲線とし、$p, q \in J$ を異なる 2 点とすると、p, q を端点とする単純弧であって J に含まれるものがちょうど 2 個存在する。これらを、p, q を端点とする J の**部分弧**という。

補題 4.6. $J \subset \mathbb{R}^2$ を単純閉曲線とする。このとき、$\mathbb{R}^2 \setminus J$ の任意の連結成分 U に対して、U の境界は J に等しい。

証明. 補題 4.2 により、U は $\mathbb{R}^2$ の開集合であるから、$\overline{U} \setminus U = J$ を示せばよい。$\mathbb{R}^2 \setminus J$ の U 以外の連結成分すべての和集合を V とすると、再び補題 4.2 により V は $\mathbb{R}^2$ の開集合であって $\mathbb{R}^2 \setminus V = U \cup J$ である。よって、$\overline{U} \subset U \cup J$ であるから、$\overline{U} \setminus U \subset J$ である。

逆の包含を示すため、$p \in J$ とし、p の $\mathbb{R}^2$ における開近傍 W を任意に与える。$J \cap W$ の点 q を適切に取り、p, q を端点とする J の部分弧の少なくとも一方が W に含まれているようにできる[*2]。p, q を端点とする J の部分弧で W に含まれているものを選んでそれ

[*2] 実際、次のようにすればよい。同相写像 $h\colon S^1 \to J$ を、$h(1,0) = p$ となるようにとる。すると、$\theta_0 \in (0, 2\pi)$ を十分 0 に近くとれば $0 \leqq \theta \leqq \theta_0$ のとき常に $h(\cos\theta, \sin\theta) \in W$ である。このときに $q = h(\cos\theta_0, \sin\theta_0)$ とおけばよい。

を A_1 とし、もう一方の部分弧を A_2 とする。もし、$W \cap U = \emptyset$ であるとすると、

$$\mathbb{R}^2 \setminus A_2 = U \cup ((W \setminus A_2) \cup V), \quad U \cap ((W \setminus A_2) \cup V) = \emptyset$$

という $\mathbb{R}^2 \setminus A_2$ の空でない開集合への分割が得られる*3。これは $\mathbb{R}^2 \setminus A_2$ が連結でないことを意味し、補題 4.5 に反する。よって、$W \cap U \neq \emptyset$ でなければならない。したがって、$p \in \overline{U}$ である。$p \in J$ であったので、$p \notin U$ である。よって、$p \in \overline{U} \setminus U$ である。これで、$J \subset \overline{U} \setminus U$ も示された。 □

4.3 Jordan の閉曲線定理の証明

それでは、本稿の目的であった Jordan の閉曲線定理 4.1 を証明しよう。以下では、次の記法を用いる。$A \subset \mathbb{R}^2$ が単純弧であり $p, q \in A$ が異なる点であるとき、A に含まれる単純弧であって p, q を端点とするものがただ一つ存在するので、それを $A(p, q)$ と書く。また、$p = q \in A$ であるときは、$A(p, q) = \{p\}$ とする。

Jordan の閉曲線定理 4.1 の証明. $J \subset \mathbb{R}^2$ を単純閉曲線とする。補題 4.4 と補題 4.6 により、$\mathbb{R}^2 \setminus J$ がただ一つの有界な連結成分をもつことを証明すればよい。$\mathbb{R}^2 \setminus J$ の（ただ一つの）非有界な連結成分を U とする。

J の二点 a, b を、距離 $\|a - b\|$ が最大となるようにとる。適切な回転と平行移動、および拡大または縮小を行うことにより、$a = (-1, 0)$, $b = (1, 0)$ であるとしてよい。長方形 $D = [-1, 1] \times [-2, 2]$ を考えよう。すると、$J \subset D$ であって、D の境界 ∂D について $J \cap \partial D = \{a, b\}$ となることに注意する。このとき、$(\mathbb{R}^2 \setminus D) \cup (\partial D \setminus \{a, b\})$ は J と交わらない非有界な弧状連結集合であるので、

$$(\mathbb{R}^2 \setminus D) \cup (\partial D \setminus \{a, b\}) \subset U \qquad (\sharp)$$

である。

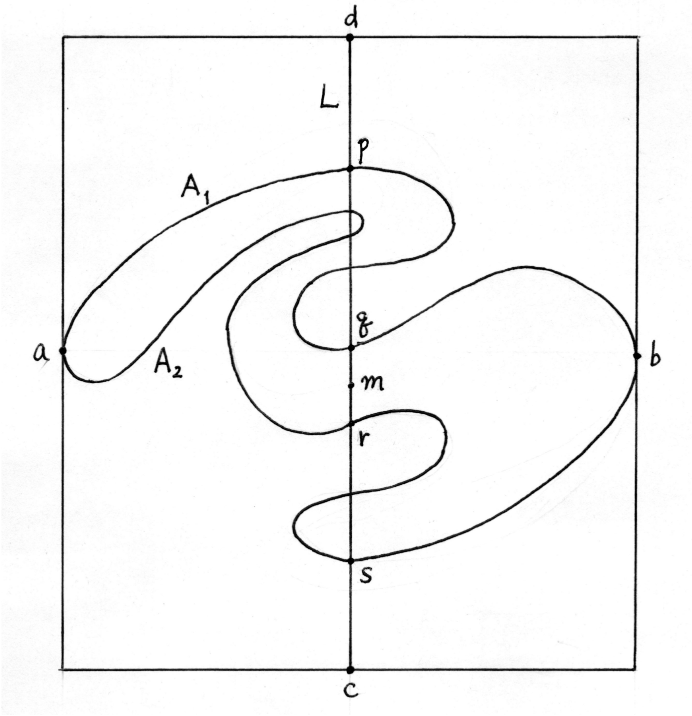
$c = (0, -2), d = (0, 2) \in \partial D$ とする。このとき、$(\sharp)$ から、$c, d \in U$ である。c と d を結ぶ線分 $L = \{0\} \times [-2, 2]$ を考え、a, b を端点とする J の二つの部分弧を A_1, A_2 とすると、これらはそれぞれ L と交わる（これは中間値の定理から直ちに分かる）。$L \cap J$ の点で y 座標が最大のものを p としよう。必要なら A_1 と A_2 の名前を付けかえて、$p \in A_1$ であるとする。さらに、$L \cap A_1$ の点で y 座標が最小のものを q とする。このとき、$L(q, c)$

*3 A_1 の端点以外の点は $W \setminus A_2$ に属し、したがって $(W \setminus A_2) \cup V$ は空でないことに注意する。

は A_2 と交わらなければならない。実際、$L(q,c)\cap A_2=\emptyset$ であったとすれば、

$$L(d,p)\cup A_1(p,q)\cup L(q,c)$$

は D の上下の辺を結ぶ一つの単純弧であって、A_2 と交わらない。A_2 は D の左右の辺を結ぶ単純弧であるから、これは補題 3.2 に反する。よって、$L(q,c)\cap A_2$ は空でないから、その点で y 座標が最大のもの、最小のものをそれぞれ r,s とする。このとき、$L(q,r)$ の中点を m としよう。m が属する $\mathbb{R}^2\setminus J$ の連結成分を V とする。



主張 1. V は有界である。したがって、$\mathbb{R}^2\setminus J$ は有界な連結成分をもつ。

主張 1 の証明. V が非有界であったとすれば、$V=U$ である。よって、$(\star)$ により、たとえば $n=(2,0)$ とすれば、$m,n\in V$ である。V は補題 4.3 により弧状連結であるから、$\alpha(0)=m$, $\alpha(1)=n$ であるような V 内の道 $\alpha\colon I\to V$ が存在する。そこで、

$$t_0=\inf\{t\in I\mid \alpha(t)\notin D\}$$

としよう。m は D の内点であるから、$t_0>0$ である。t_0 の定義から $[0,t_0)\subset\alpha^{-1}(D)$ だが、$\alpha^{-1}(D)$ は I の閉集合なので、$[0,t_0]\subset\alpha^{-1}(D)$ であり、したがって $\alpha([0,t_0])\subset D$ である。もし、$\alpha(t_0)\notin\partial D$ であるとすると、$\alpha(t_0)$ は D の内点であるから、ある $\varepsilon>0$ に

対して $\alpha(t_0+\varepsilon)\in D$ となるが、これは t_0 の定め方に反する。よって、$\alpha(t_0)\in\partial D$ である。α は V 内の道なので、$\alpha(t_0)\in V\subset\mathbb{R}^2\setminus J$ であり、したがって、$\alpha(t_0)\in\partial D\setminus\{a,b\}$ である。

単純閉曲線 ∂D の a,b を端点とする部分弧のうち、c が属する方を B_1 とし、d が属する方を B_2 とする。(i) $\alpha(t_0)\in B_1$ の場合と、(ii) $\alpha(t_0)\in B_2$ の場合に分けて考えよう。

(i) の場合、d から c に到る次のような D 内の道を考える。まず、単純弧 $L(d,p)\cup A_1(p,q)\cup L(q,m)$ をたどり、d から m に到る。そして、$\alpha|_{[0,t_0]}$ によって、m から $\alpha(t_0)$ に到る。最後に、単純弧 $B_1(\alpha(t_0),c)$ をたどり、$\alpha(t_0)$ から c に到る。この d から c に到る道は確かに D 内にあり、しかも A_2 とは交わらない。これは補題 3.2 に反する。

(ii) の場合、c から d に到る次のような D 内の道を考える。まず、線分 $L(c,m)$ をたどって c から m に到る。次に、 $\alpha|_{[0,t_0]}$ によって、m から $\alpha(t_0)$ に到る。最後に、単純弧 $B_2(\alpha(t_0),d)$ をたどり、$\alpha(t_0)$ から d に到る。この c から d に到る道は確かに D 内にあり、しかも A_1 とは交わらない。これは補題 3.2 に反する。

(i) と (ii) のどちらの場合も矛盾したので、V が非有界ではない、つまり有界であることが証明された。 □

主張 2. $\mathbb{R}^2\setminus J$ の有界な連結成分は V 以外には存在しない。

主張 2 の証明. V 以外に $\mathbb{R}^2\setminus J$ の有界な連結成分 W が存在したとしよう。すると、W は U とも V とも交わらない。とくに、W が U と交わらないことと ($\sharp$) から、$W\subset D$ であることに注意する。いま $L(q,r)\setminus\{q,r\}$ は J と交わらない連結集合であって、m を要素にもつから、$L(q,r)\setminus\{q,r\}\subset V$ である。ところが、$V\cap W=\emptyset$ であり $q,r\notin W$ であるから、

$$L(q,r)\cap W=\emptyset \qquad (\star)$$

である。

次に、c と d を端点とする単純弧

$$A=L(d,p)\cup A_1(p,q)\cup L(q,r)\cup A_2(r,s)\cup L(s,c)$$

を考える。($\sharp$) の後で注意した通り $c,d\in U$ であり、したがって $L(d,p)\setminus\{p\}$ と $L(s,c)\setminus\{s\}$ はそれぞれ U に含まれる。$U\cap W=\emptyset$ であるから、($\star$) により、$A\cap W=\emptyset$ である。

さて、補題 4.6 により、$\overline{W}\setminus W=J$ であるから、とくに $a,b\in\overline{W}$ である。よって a,b を中心とする小さい開円板 D_a,D_b を（A と交わらないように）取れば、点 $a'\in D_a\cap W$ および点 $b'\in D_b\cap W$ が存在する。W は補題 4.3 により弧状連結なので、W 内の道 $\beta\colon I\to W$ であって $\beta(0)=a'$, $\beta(1)=b'$ となるものが存在する。このとき、a と a' を

結ぶ線分をたどり、次に β をたどり、最後に b' と b を結ぶ線分をたどって得られる道は、A と交わらずに D 内で a と b を結ぶ。これは、補題 3.2 に反する。 □

主張 1 と主張 2 によって、Jordan の閉曲線定理は証明された。 □

参考文献

[1] R. Maehara, *The Jordan curve theorem via the Brouwer fixed point theorem*, Amer. Math. Monthly **91** (1984), no. 10, 641–643.