

カントール集合と有理数空間の特徴づけ

yamyamtopo

カントール集合と有理数の空間 \mathbb{Q} については、それぞれ以下のような位相的特徴づけが知られている。

定理 A (カントール集合の特徴づけ). 完全不連結で孤立点をもたず空でないコンパクト距離空間は、カントール集合と同相である。

定理 B (有理数空間の特徴づけ). 可算無限個の点からなり孤立点をもたない距離空間は、 \mathbb{Q} と同相である。

定理 A は Brouwer [1] により、定理 B は Sierpiński [2] により証明された。本稿では、点集合トポロジーの初期の成果であるこれらの定理の証明を紹介する。

1 カントール集合の復習

1.1 「三分の一」構成による定義

$C_0 = [0, 1]$ を単位閉区間とする。 C_0 から中央の三分の一の開区間を除けば、 $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ を得る。 C_1 の連結成分である各閉区間から、再び中央の三分の一の開区間を除けば、 $C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$ を得る。この操作を繰り返せば、 C_n としてはそれぞれ長さが 3^{-n} である 2^n 個の閉区間を連結成分にもつコンパクト集合が得られる。このとき、共通部分

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

をカントール集合 (Cantor set) という。 C は \mathbb{R} の空でないコンパクト集合である。

すべての連結成分が一点からなるような位相空間は完全不連結 (totally disconnected) であるという。カントール集合 C は完全不連結である。実際、 E を C の連結成分としよう。 E は C_n のある連結成分に含まれるから、直径が 3^{-n} 以下である。しか

し、この n は任意に取れるから、 E の直径は 0 であり、したがって E は一点からなる。

1.2 三進小数展開による記述

C は三進法による小数表示を使っても記述できるが、その説明のために記法を準備しよう。まず、非負整数 n に対して、 $0, 1$ からなる長さ n の有限列 $s_1 \cdots s_n$ ($s_i \in \{0, 1\}$) の全体を Σ_n とする。 Σ_0 は空列 \emptyset をただ一つの要素にもつ。さらに、 $0, 1$ からなる可算無限列 $s = s_1 s_2 s_3 \cdots$ の全体を Σ_ω とする。 $s \in \Sigma_\omega$ に対して、 s の最初の n 個を取り出して得られる有限列 $s_1 \cdots s_n \in \Sigma$ を $s[n]$ で表す。

各有限列 $s \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma_n$ に対して閉区間 $D_s \subset [0, 1]$ を次のように長さについての帰納法で定義する。 $\emptyset \in \Sigma_0$ に対して $D_\emptyset = [0, 1]$ とする。 $n \geq 1$ として、各 $s \in \Sigma_{n-1}$ に対して閉区間 $D_s = [a_s, a_s + 3^{-n+1}]$ が定義されているとき、 $s_0, s_1 \in \Sigma_n$ に対して $D_{s_0} = [a_s, a_s + 3^{-n}]$, $D_{s_1} = [a_s + 2 \cdot 3^{-n}, a_s + 3^{-n+1}]$ とする。すると、 $\bigcup_{s \in \Sigma_n} D_s = C_n$ で、 $s, s' \in \Sigma_n$ が異なるならば $D_s \cap D_{s'} = \emptyset$ となる。さらに、 $s = s_1 \cdots s_n \in \Sigma_n$ に対して

$$D_s = D_{s_1 \cdots s_n} = \left[\sum_{i=1}^n \frac{2s_i}{3^i}, \frac{1}{3^n} + \sum_{i=1}^n \frac{2s_i}{3^i} \right] \quad (*)$$

となる。ここで、 $s \in \Sigma_n, t \in \Sigma_{n+1}$ に対して $D_s \cap D_t \neq \emptyset$ となるのは $t = s_0$ または $t = s_1$ の場合に限ることに注意すれば、

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{s \in \Sigma_n} D_s = \bigcup_{s \in \Sigma_\omega} \bigcap_{n=0}^{\infty} D_{s[n]}$$

となる。一方、(*) により、各 $s = s_1 s_2 \cdots \in \Sigma_\omega$ に対して $c_s = \sum_{i=1}^{\infty} 2s_i/3^i$ とおくと $\bigcap_{n=0}^{\infty} D_{s[n]} = \{c_s\}$ であり、 $s, s' \in \Sigma_\omega$ が異なるとき $c_s \neq c_{s'}$ である。こうして、表示

$$C = \{c_s \mid s \in \Sigma_\omega\} = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{2s_i}{3^i} \mid s = s_1 s_2 \cdots \in \Sigma_\omega \right\}$$

を得る。これで、 C は三進法で 0 と 2 のみが見れる小数展開をもつ 0 以上 1 以下の実数全体に等しく、しかもそのような小数展開は一意的であることが分かった。とくに、 C の濃度は連続体濃度 2^{\aleph_0} であって、 $[0, 1]$ や \mathbb{R} の濃度に等しい。

1.3 無限直積空間としての記述

以下では \mathbb{N} により正の整数全体を表す。二点からなる離散空間 $\{0, 1\}$ の可算直積空間 $C' = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ を考える。 C' は集合として Σ_ω と同一視できるので、全単射 $\varphi: C \rightarrow C'$

が $\varphi(c_s) = s$ により定義される。 $\text{pr}_n: C' \rightarrow \{0,1\}$ を第 n 成分への射影とすると、

$$(\text{pr}_n \circ \varphi)^{-1}(\{\varepsilon\}) = C \cap \bigcup \{D_s \mid s \in \Sigma_n, s(n) = \varepsilon\} \quad (\varepsilon = 0, 1)$$

なので、 $\text{pr}_n \circ \varphi$ は連続、よって φ は連続である。 C はコンパクト空間、 C' は Hausdorff 空間なので、 $\varphi: C \rightarrow C'$ は同相写像である。カントール集合の位相だけを問題にする立場からは、 C のかわりに $C' = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ を考えるのが便利なことも多い。

$\{0,1\}$ を 2 個の元からなる巡回群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同一視すれば、 $C' = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ は直積群 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ として位相群の構造をもつことが分かる。このことから、 C' が孤立点をもたないことが証明できる。実際、 C' に孤立点があれば、位相群の平行移動が同相写像であることから C' の点はすべて孤立点となり、 C' は離散空間となる。しかし、 C' はコンパクトだから、このとき C' は有限集合でなくてはならず、矛盾する。

よって、 C' は孤立点をもたないから、カントール集合 C も孤立点をもたない。(無限小数展開を用いた表示からも、 C が孤立点をもたないことは直接確かめられる。)

ここまでの考察で、カントール集合は完全不連結なコンパクト距離空間で、孤立点をもたないことが分かった。逆に、このような空間は(空集合でなければ)カントール集合に同相となることを定理 A は主張している。

2 完全不連結性

補題 2.1. コンパクト Hausdorff 空間 X が完全不連結であるならば、任意の異なる $x, y \in X$ に対して、 X の開かつ閉集合 U であって $x \in U, y \notin U$ となるものが存在する。

証明. そのような U が存在しないとしよう。このとき、 x を要素にもつ X の開かつ閉集合すべての共通部分を Y とすると、 $x, y \in Y$ である。 X の完全不連結性から Y は連結でないので、 $Y = Y_1 \cup Y_2, x \in Y_1, Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ となるような X の空でない閉集合 Y_1, Y_2 が存在する。 X は正規であるから、 $Y_1 \subset U_1, Y_2 \subset U_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset$ となるような X の開集合 U_1, U_2 が存在する。 X の開被覆

$$\{U_1 \cup U_2\} \cup \{V \subset X \mid x \notin V, V \text{ は } X \text{ の開かつ閉集合}\}$$

が有限部分被覆をもつことから、 X の開かつ閉集合 W で $x \in W \subset U_1 \cup U_2$ となるものが存在すると分かる。このとき、 $W \cap U_1$ は x を要素にもつ X の開かつ閉集合だが、 Y を含んでいないので矛盾する。 \square

命題 2.2. コンパクト Hausdorff 空間 X が完全不連結であるならば、 X の開かつ閉集合全体は開基となる。

証明. X の点 x とその開近傍 U を任意に与える. X のコンパクト性と補題 2.1 により、 X の有限個の開かつ閉集合 V_1, \dots, V_n で $X \setminus U \subset \bigcup_{i=1}^n V_i \subset X \setminus \{x\}$ となるものが存在する. このとき、 $V = X \setminus \bigcup_{i=1}^n V_i$ は開かつ閉集合で $x \in V \subset U$ を満たす. \square

3 カントール集合の特徴づけ

位相空間 X が定理 A で述べられた性質をもつとき、つまり X が

空でなく、孤立点をもたず、完全不連結、コンパクトかつ距離化可能である

とき、暫定的な用語として、 X は性質 \mathbf{c} をもつと呼ぶことにしよう. カントール集合が性質 \mathbf{c} をもつことは分かっている. したがって、定理 A は、次の定理の系となる.

定理 3.1. X, Y がともに性質 \mathbf{c} をもつ位相空間であるならば、 X と Y は同相である.

まず、簡単にこの定理の証明のアイデアを説明する. X, Y が性質 \mathbf{c} をもつことから、 X, Y はそれぞれ開かつ閉集合の族 \mathcal{U}, \mathcal{V} によって細かく分割できる. \mathcal{U} と \mathcal{V} が同数の要素からなるように調節しておけば、全単射 $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ を取ることができる. \mathcal{U}, \mathcal{V} を段々と細かくしていき、全単射 f もそれに合わせて取っていけば、 f は同相写像 $X \rightarrow Y$ に「収束」し、 X と Y は同相であることが分かる.

これを正確に述べるための準備をしよう. 位相空間 X の有限個の互いに交わらない開かつ閉集合からなる族 \mathcal{U} で、その合併 $\bigcup \mathcal{U} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ が X に等しいものを X の分割という. このとき、各 $x \in X$ に対して、 $x \in U$ となる U の唯一の要素 U を $[x]_{\mathcal{U}}$ で表す. X の分割 \mathcal{U}' の任意の要素が \mathcal{U} のある要素の部分集合であるとき、 \mathcal{U}' は分割 \mathcal{U} の細分であるという. このとき、各 $U \in \mathcal{U}$ に対して、 $\mathcal{U}'|_U$ を $\mathcal{U}'|_U = \{U' \in \mathcal{U}' \mid U' \subset U\}$ で定める U の分割とする. さらに、位相に合致した X 上の距離 d が与えられているとき、 X の分割 \mathcal{U} の細かさを表す量として

$$\text{mesh } \mathcal{U} = \max\{\text{diam } U \mid U \in \mathcal{U}\}$$

を考える. ここで、 $\text{diam } U$ は U の直径 $\sup\{d(x, y) \mid x, y \in U\}$ とする.

分割の間の全単射についても、細分の概念を定義する. 位相空間 X, Y の分割 \mathcal{U}, \mathcal{V} および全単射 $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ が与えられているとする. このとき、 f の細分とは、 \mathcal{U} の細分 \mathcal{U}' から \mathcal{V} の細分 \mathcal{V}' への全単射 $f': \mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{V}'$ であって、 $U' \in \mathcal{U}', U \in \mathcal{U}, U' \subset U$ のとき常に $f'(U') \subset f(U)$ であるようなものとする. このとき、 $f'^{-1}: \mathcal{V}' \rightarrow \mathcal{U}'$ は $f^{-1}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ の細分となることに注意する.

分割の性質で、以下において必要になるものを挙げる。

補題 3.2. X を性質 c をもった空間とすると、次が成り立つ。

- (1) X の任意の分割 \mathcal{U} に対して、 \mathcal{U} の各要素は性質 c をもつ。
- (2) 任意の $n \geq 1$ に対して、 X の分割 \mathcal{U} でちょうど n 個の要素からなるものが存在する。
- (3) X の分割 \mathcal{U} および位相に合致した X 上の距離 d が与えられているとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 \mathcal{U} の細分 \mathcal{U}' で $\text{mesh } \mathcal{U}' < \varepsilon$ となるものが存在する。

証明. (1) は性質 c の定義からすぐに確かめられる。(2)(3) は、(1) および命題 2.2 を用いて確かめられる。□

補題 3.3. X, Y を性質 c を満たす空間とし、 $f: X \rightarrow Y$ を X の分割 \mathcal{U} から Y の分割 \mathcal{V} への全単射とする。このとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 f の細分 $f': \mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{V}'$ で $\text{mesh } \mathcal{U}' < \varepsilon$ となるものが存在する。

証明. まず、補題 3.2(3) により、 \mathcal{U} の細分 \mathcal{U}' で $\text{mesh } \mathcal{U}' < \varepsilon$ となるものが存在する。次に、補題 3.2(2) により、各 $U \in \mathcal{U}$ に対して、 $f(U)$ の分割 \mathcal{V}'_U であって $\mathcal{U}'|_U$ と同じ個数の要素からなるものが取れる。このとき、 $\mathcal{V}' = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{V}'_U$ は \mathcal{U}' の細分である。各 $U \in \mathcal{U}$ に対して全単射 $f'_U: \mathcal{U}'|_U \rightarrow \mathcal{V}'_U$ を選び、 $f': \mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{V}'$ を $U' \in \mathcal{U}'|_U$ のとき $f'(U') = f'_U(U')$ であるとして定義すれば、 f' は全単射であって f の細分である。□

以上の準備のもと、定理 3.1 を証明しよう。

定理 3.1 の証明. X, Y をともに性質 c を満たす位相空間とし、それぞれ位相に合致した距離を固定しておく。これらの距離は、 $\text{diam } X, \text{diam } Y < 1$ であるように取っておく。

このとき、 X の分割の列 $(\mathcal{U}_n)_{n=0}^{\infty}$ 、 Y の分割の列 $(\mathcal{V}_n)_{n=0}^{\infty}$ および全単射の列 $(f_n: \mathcal{U}_n \rightarrow \mathcal{V}_n)_{n=0}^{\infty}$ で、次を満たすものが帰納的に構成できる。

- (i) \mathcal{U}_{n+1} は \mathcal{U}_n の細分であり、 \mathcal{V}_{n+1} は \mathcal{V}_n の細分である。
- (ii) f_{n+1} は f_n の細分である。
- (iii) $\text{mesh } \mathcal{U}_n, \text{mesh } \mathcal{V}_n < 2^{-n}$

まず、 $\mathcal{U}_0 = \{X\}$ 、 $\mathcal{V}_0 = \{Y\}$ 、 $f_0(X) = Y$ と定義する。 \mathcal{U}_{n-1} 、 \mathcal{V}_{n-1} 、 f_{n-1} まで構成が終わったとしよう。

帰納的ステップでは、補題 3.3 を二回、 X と Y の役割を入れ換えて適用する。まず、

$f_{n-1}: \mathcal{U}_{n-1} \rightarrow \mathcal{V}_{n-1}$ に補題 3.3 を適用し、 f_{n-1} の細分 $f'_{n-1}: \mathcal{U}'_{n-1} \rightarrow \mathcal{V}'_{n-1}$ であって $\text{mesh} \mathcal{U}'_{n-1} < 2^{-n}$ となるものが得られる。次に、逆写像 $f'^{-1}_{n-1}: \mathcal{V}'_{n-1} \rightarrow \mathcal{U}'_{n-1}$ に補題 3.3 を適用し、 f'^{-1}_{n-1} の細分 $g_n: \mathcal{V}_n \rightarrow \mathcal{U}_n$ であって $\text{mesh} \mathcal{V}_n < 2^{-n}$ となるものが得られる。このとき、 $f_n = g_n^{-1}$ とおけば $f_n: \mathcal{U}_n \rightarrow \mathcal{V}_n$ は f_{n-1} の細分で、 $\text{mesh} \mathcal{U}_n, \text{mesh} \mathcal{V}_n < 2^{-n}$ を満たす。これで、帰納的構成が終わった。

最後に、同相写像 $h: X \rightarrow Y$ を定義しよう。 $x \in X$ に対して

$$K_n(x) = f_n([x]_{\mathcal{U}_n}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とおくと、 $K_n(x)$ は Y の空でないコンパクト集合であって、 $\text{diam} K_n(x) < 2^{-n}$ および $K_{n+1}(x) \subset K_n(x)$ を満たす。よって、 $\bigcap_{n=0}^{\infty} K_n(x) = \bigcap_{n=0}^{\infty} f_n([x]_{\mathcal{U}_n}) = \{h(x)\}$ によって $h: X \rightarrow Y$ が定義される。すると、 $h([x]_{\mathcal{U}_n}) \subset [h(x)]_{\mathcal{U}'_n}$ であるから h は連続である。 X と Y の立場を入れかえ、同様にして連続写像 $k: Y \rightarrow X$ が $\bigcap_{n=0}^{\infty} f_n^{-1}([y]_{\mathcal{V}_n}) = \{k(y)\}$ ($y \in Y$) により定義される。すると $k \circ h([x]_{\mathcal{U}_n}) \subset [x]_{\mathcal{U}_n}$ ($x \in X$) となることから $k \circ h = \text{id}$ であり、同様にして $h \circ k = \text{id}$ である。よって、 $h: X \rightarrow Y$ は同相写像である。□

これで定理 3.1 が証明され、したがって、カントール集合の特徴づけ (定理 A) が証明された。

4 有理数空間の特徴づけ

この節では、定理 3.1 の議論を精密化して次の定理を示し、それを用いて有理数空間の特徴づけ (定理 B) を証明する。

定理 4.1. X, Y がともに性質 c をもつ位相空間であり、 $D \subset X, E \subset Y$ をそれぞれ可算な稠密集合とする。このとき、 (X, D) と (Y, E) は組として同相である。すなわち、同相写像 $h: X \rightarrow Y$ であって、 $h(D) = E$ を満たすものが存在する。

証明の前に、分割について必要となる用語と補題を準備する。位相空間 X の分割 \mathcal{U} が有限集合 $F \subset X$ を分離するとは、 $x, x' \in F, x \neq x'$ のとき常に $[x]_{\mathcal{U}} \neq [x']_{\mathcal{U}}$ であることをいう。次の補題は、前の補題 3.3 からすぐに導かれる。

補題 4.2. X, Y を性質 c を満たす空間とし、 $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ を X の分割 \mathcal{U} から Y の分割 \mathcal{V} への全単射とする。このとき、任意の $\varepsilon > 0$ と有限集合 $F \subset X$ に対して、 f の細分 $f': \mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{V}'$ で、 \mathcal{U}' が F を分離し、 $\text{mesh} \mathcal{U}' < \varepsilon$ となるものが存在する。□

定理 4.1 の証明. X, Y にはそれぞれ位相に合致した距離で $\text{diam } X < 1, \text{diam } Y < 1$ となるものを固定し、 $D = \{x_i \mid i = 0, 1, 2, \dots\}, E = \{y_i \mid i = 0, 1, 2, \dots\}$ と番号づける。ただし、 $i \neq j$ のとき、 $x_i \neq x_j, y_i \neq y_j$ であるとする。

このとき、 X, Y の分割の列 $(\mathcal{U}_n)_{n=0}^\infty, (\mathcal{V}_n)_{n=0}^\infty$, 全単射の列 $(f_n: \mathcal{U}_n \rightarrow \mathcal{V}_n)_{n=0}^\infty$ に加えて、 D, E の有限部分集合の列 $(D_n)_{n=0}^\infty, (E_n)_{n=0}^\infty$ および全単射の列 $(\varphi_n: D_n \rightarrow E_n)_{n=0}^\infty$ で、次を満たすものが帰納的に構成できる（最初の (i)(ii)(iii) は定理 3.1 の証明のときと同じである）。

- (i) \mathcal{U}_{n+1} は \mathcal{U}_n の細分であり、 \mathcal{V}_{n+1} は \mathcal{V}_n の細分である。
- (ii) f_{n+1} は f_n の細分である。
- (iii) $\text{mesh } \mathcal{U}_n, \text{mesh } \mathcal{V}_n < 2^{-n}$
- (iv) $x_n \in D_n, y_n \in E_n$
- (v) $D_n \subset D_{n+1}, E_n \subset E_{n+1}$
- (vi) $\varphi_{n+1}|_{D_n} = \varphi_n$
- (vii) $x \in D_n$ のとき、 $f_n([x]_{\mathcal{U}_n}) = [\varphi_n(x)]_{\mathcal{V}_n}$

はじめに、 $\mathcal{U}_0 = \{X\}, \mathcal{V}_0 = \{Y\}, D_0 = \{x_0\}, E_0 = \{y_0\}$ と定義し、 $f_0: \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathcal{V}_0, \varphi_0: D_0 \rightarrow E_0$ を $f_0(X) = Y, \varphi_0(x_0) = y_0$ で定める。次に $n \geq 1$ とし、 $\mathcal{U}_{n-1}, \mathcal{V}_{n-1}, D_{n-1}, E_{n-1}, f_{n-1}, \varphi_{n-1}$ まで定義され、(i)-(vii) が成立しているとしよう。

ここでも帰納的ステップでは、補題 4.2 を二回、 X と Y の役割を入れ換えて適用する。すなわち、まず中間的な段階として $\mathcal{U}'_n, \mathcal{V}'_n, D'_n, E'_n, f'_n, \varphi'_n$ を構成し、 X と Y の役割を入れ換えて同様のことを行い $\mathcal{U}_n, \mathcal{V}_n, D_n, E_n, f_n, \varphi_n$ を得る (back-and-forth argument と呼ばれる)。

まず、 $D'_n = D_{n-1} \cup \{x_n\}$ と定義する。補題 4.2 により、 $f_{n-1}: \mathcal{U}_{n-1} \rightarrow \mathcal{V}_{n-1}$ の細分 $f'_n: \mathcal{U}'_n \rightarrow \mathcal{V}'_n$ であって、 \mathcal{U}'_{n-1} が D'_n を分離し、 $\text{mesh } \mathcal{U}'_n < 2^{-n}$ となるものが存在する。さらに、必要なら f'_n を取り換えて、各 $x \in D_{n-1}$ に対して $f'_n([x]_{\mathcal{U}'_n}) = [\varphi_{n-1}(x)]_{\mathcal{V}'_n}$ となるようにできる。

次に E'_n と $\varphi_n: D'_n \rightarrow E'_n$ を定義する。 $D'_n = D_{n-1}$, つまり $x_n \in D_{n-1}$ である場合は、 $E'_n = E_{n-1}$ とし、 $\varphi'_n = \varphi_{n-1}$ とする。 $x_n \notin D_{n-1}$ である場合は、 $f'_n([x_n]_{\mathcal{U}'_n}) \cap E$ の要素 y_ν を何でもよいから一つ選び (たとえば添字 ν の最小なもの)、 $E'_n = E_n \cup \{y_\nu\}$ とし、 $\varphi'_n(x_n) = y_\nu$ として φ_{n-1} を全単射 $\varphi'_n: D'_n \rightarrow E'_n$ に拡張する (ここで、 E の稠密性を用いている)。

このように定義したとき、(vii) と類似の条件、つまり

- 各 $x \in D'_n$ に対して、 $f'_n([x]_{\mathcal{U}'_n}) = [\varphi'_n(x)]_{\mathcal{V}'_n}$

が成り立っていることに注意する。

次に、 X と Y の立場を逆転させて、同様の構成を行う。すなわち、いままでの $X, Y, \mathcal{U}_{n-1}, \mathcal{V}_{n-1}, D_{n-1}, E_{n-1}, f_{n-1}, \varphi_{n-1}$ の役割を、それぞれ $Y, X, \mathcal{V}'_n, \mathcal{U}'_n, E'_n, D'_n, f_n^{-1}, \varphi_n^{-1}$ が担う。箇条書きで述べていくと、

- $E_n = E'_n \cup \{y_n\}$ とする。
- 補題 4.2 により、 $f_n^{-1}: \mathcal{V}'_n \rightarrow \mathcal{U}'_n$ の細分 $g_n: \mathcal{V}_n \rightarrow \mathcal{U}_n$ で、 \mathcal{V}_n は E'_n を分離し、 $\text{mesh } \mathcal{V}'_n < 2^{-n}$ となるものが存在する。
- 必要ならば g_n を取り換えて、各 $y \in E'_n$ に対して $g_n([y]_{\mathcal{V}_n}) = [\varphi_n^{-1}(y)]_{\mathcal{U}_n}$ が成り立つようにしておく。
- $f_n = g_n^{-1}: \mathcal{U}_n \rightarrow \mathcal{V}_n$ とする。
- $y_n \in E_n$ のときは $D_n = D'_n, \varphi_n = \varphi'_n: D_n \rightarrow E_n$ とする。
- $y_n \notin E_n$ のときは $g_n([y_n]_{\mathcal{V}_n}) \cap D = f_n^{-1}([y_n]_{\mathcal{V}_n}) \cap D$ の要素 x_ν を一つ選び、 $D_n = D'_n \cup \{x_\nu\}$ とし、 $\varphi_n(x_\nu) = y_n$ とすることで、 φ'_n を全単射 $\varphi_n: D_n \rightarrow E_n$ に拡張する。

以上のように構成すれば、(i)-(vii) の条件が確かに満たされている。これで、帰納的構成が終わった。

(i)(ii)(iii) により、定理 3.1 の証明のときと同様に、 $h: X \rightarrow Y, k: Y \rightarrow X$ を

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} f_n([x]_{\mathcal{U}_n}) = \{h(x)\}, \quad \bigcap_{n=0}^{\infty} f_n^{-1}([y]_{\mathcal{V}_n}) = \{k(y)\}$$

により定義することができ、 h, k は互いに逆の同相写像となる。

(iv)(v)(vi) により、 $\bigcup_{n=0}^{\infty} D_n = D, \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n = E$ で、 $\varphi: D \rightarrow E$ が $\varphi|_{D_n} = \varphi_n$ により定義され、 φ は全単射となる。さらに、(vii) により、 $h|_D = \varphi$ である。よって、同相写像 $h: X \rightarrow Y$ は $h(D) = \varphi(D) = E$ を満たす。□

さて、有理数空間の特徴づけ (定理 B) を証明しよう。まず、補題を二つ示しておく。

補題 4.3. $X = (X, d)$ が (高々) 可算個の点からなる距離空間であるならば、開かつ閉集合からなる X の可算開基が存在する。

証明. $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ と表す。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $A_n = \{d(x_n, x) \mid x \in X\}$ は可算集合であるから、 A_n に属していない正の実数の狭義単調減少列 $(r_{n,i})_{i=1}^{\infty}$ で $i \rightarrow \infty$ のとき

$r_{n,i} \rightarrow 0$ となるものを選ぶことができる。このとき、開球体の族 $\{B_d(x_n, r_{n,i}) \mid n, i \in \mathbb{N}\}$ は開かつ閉集合からなる X の可算開基である。□

補題 4.4. X が可算無限個の点からなる孤立点のない距離空間であるとする。このとき、性質 c をもつ空間 C と位相的埋め込み $i: X \rightarrow C$ であって、 $i(X)$ が C において稠密であるものが存在する。

証明. X を可算無限個の点からなる孤立点をもたない距離空間とする。補題 4.3 により、開かつ閉集合からなる X の開基 $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が存在する。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n: X \rightarrow \{0, 1\}$ を

$$f_n(x) = 1 \iff x \in U_n$$

により定義すれば、 f_n は連続である。 $i: X \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ を $i(x) = (f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ で定義すれば、 i は位相的埋め込みとなる。 C を $i(X)$ の $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ における閉包としよう。§1.3 で見たように $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ はカントール集合と同相であり、 C はその空でない閉部分空間で孤立点をもたない。よって、 C は性質 c をもつ空間である。□

定理 B の証明. \mathbb{Q} は可算無限個の点からなる孤立点のない距離空間である。よって、 X, Y がともに可算無限個の点からなる孤立点のない距離空間であるときに X と Y が同相であることを示せばよい。

補題 4.4 により、性質 c を満たす空間 C, D と位相的な埋め込み $i: X \rightarrow C, j: Y \rightarrow D$ で $i(X), j(Y)$ がそれぞれ C, D において稠密であるものが存在する。定理 4.1 により、 $(C, i(X))$ と $(D, j(Y))$ は組として同相であるから、とくに $i(X)$ と $j(Y)$ は同相である。よって、 X と Y は同相である。□

参考文献

- [1] L.E.J. Brouwer, *On the structure of perfect sets of points*, Proc. Akad. Amsterdam **12** (1910), 785–794.
- [2] W. Sierpiński, *Sur une propriété topologique des ensembles dénombrables denses en soi*, Fund. Math. **1** (1920), 11–16.